# Quaternion

KITECH 양광웅 작성
Update: 2014.5.22

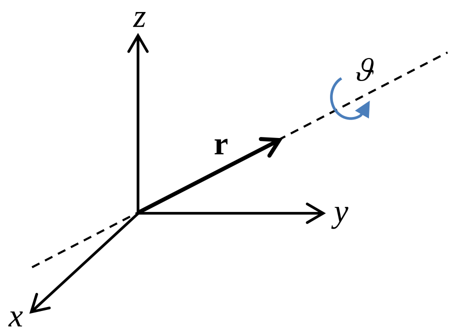
쿼터니언(Quaternion; 사원수)은 물체의 회전이나 방향 설정에서 뛰어난 성능을 발휘한다. 특히, 오일러 각(Euler Angles)의 연산에서 발생하는 짐벌락(Gimbal Lock)과 같은 각종 문제점들을 극복하기 위해 쿼터니언을 사용한다. 그리고 9개의 원소를 사용하는 회전행렬에 비해 4개의 원소로 간결하게 표현할 수 있다.

## Quaternion

쿼터니언은 3개의 벡터 요소와 하나의 스칼라 요소로 구성된다.

$$q = \{\eta,\ \boldsymbol{\varepsilon}\} = \{\eta,\ \varepsilon_x,\ \varepsilon_y,\ \varepsilon_z\}$$

여기서 $\eta$ 는 쿼터니언의 스칼라 성분이고, $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_x,\ \varepsilon_y,\ \varepsilon_z)$ 는 쿼터니언의 벡터 성분이다.




상기 그림에서와 같이 회전 축이 되는 벡터 $\mathbf{r}$ 와 회전각 $\vartheta$ 로부터 쿼터니언을 다음과 같이 계산한다.

$$q = \{\eta,\ \boldsymbol{\varepsilon}\} = \{\cos\frac{\vartheta}{2},\ \frac{\mathbf{r}}{\|\mathbf{r}\|}\sin\frac{\vartheta}{2}\}$$

**Unit Quaternion:**
쿼터니언의 크기가 1일 때 단위쿼터니언(Unit Quaternion)으로 부른다. 단위 쿼터니언은 쿼터니언의 놈을 나누어 계산한다.

$$q_U = \frac{q}{\|q\|}$$

**Product:**

쿼터니언의 곱은 다음과 같이 계산한다.

$$q_1 q_2 = \{\eta_1 \eta_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_1^T \boldsymbol{\varepsilon}_2,\ \eta_1 \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \eta_2 \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_1 \times \boldsymbol{\varepsilon}_2\}$$

쿼터니언의 곱은 두 회전행렬 $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ 의 곱 $\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2$ 과 같은 의미이다. 그리고 쿼터니언의 곱에 대한 역은 성립하지 않는다. ($q_1 q_2 \neq q_2 q_1$)

**Conjugate:**

쿼터니언의 conjugate $q^*$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$q^* = \{\eta,\ -\boldsymbol{\varepsilon}\}$$

쿼터니언의 벡터 부분 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 의 부호를 바꿈으로 구한다.

쿼터니언의 곱의 conjugate는 다음 특성을 만족한다:

$$(q^*)^* = q,\ (pq)^* = q^* p^*$$

**Norm:**

쿼터니언의 놈(norm)은 다음과 같이 정의된다.

$$\|q\| = \sqrt{\eta^2 + \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2}$$

쿼터니언의 곱의 놈은 다음 특성을 만족한다:

$$\|q^*\| = \|q\|,\ \|pq\| = \|p\|\|q\|$$

**Inverse:**

쿼터니언의 역(inverse) $q^{-1}$ 은 회전행렬 $\mathbf{R}$ 의 역 $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ 과 같은 의미이며 다음과 같이 계산한다.

$$q^{-1} = \frac{q^*}{\|q\|^2}$$

## Euler Angles to Quaternion

오일러각 $\Lambda = (\phi, \theta, \psi)$ 로 쿼터니언을 다음과 같이 계산한다.

**ZYX(Roll-Pitch-Yaw) Angles:**

$$q = \mathrm{Q}(\Lambda) = \mathrm{Q}_z(\psi)\,\mathrm{Q}_y(\theta)\,\mathrm{Q}_x(\phi)$$

$$= \begin{bmatrix} \eta \\ \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi/2)\cos(\theta/2)\cos(\phi/2) + \sin(\psi/2)\sin(\theta/2)\sin(\phi/2) \\ \cos(\psi/2)\cos(\theta/2)\sin(\phi/2) - \sin(\psi/2)\sin(\theta/2)\cos(\phi/2) \\ \cos(\psi/2)\sin(\theta/2)\cos(\phi/2) + \sin(\psi/2)\cos(\theta/2)\sin(\phi/2) \\ \sin(\psi/2)\cos(\theta/2)\cos(\phi/2) - \cos(\psi/2)\sin(\theta/2)\sin(\phi/2) \end{bmatrix}$$

여기서 각 축별 쿼터니언 변환 함수는 다음과 같다.

$$\mathrm{Q}_z(\psi) = \{\cos(\psi/2), 0, 0, \sin(\psi/2)\},$$
$$\mathrm{Q}_y(\theta) = \{\cos(\theta/2), 0, \sin(\theta/2), 0\},$$
$$\mathrm{Q}_x(\phi) = \{\cos(\phi/2), \sin(\phi/2), 0, 0\}.$$

**XYZ Angles:**

$$q = \mathrm{Q}(\Lambda) = \mathrm{Q}_x(\phi)\,\mathrm{Q}_y(\theta)\,\mathrm{Q}_z(\psi)$$

$$= \begin{bmatrix} \eta \\ \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi/2)\cos(\theta/2)\cos(\phi/2) - \sin(\psi/2)\sin(\theta/2)\sin(\phi/2) \\ \cos(\psi/2)\cos(\theta/2)\sin(\phi/2) + \sin(\psi/2)\sin(\theta/2)\cos(\phi/2) \\ \cos(\psi/2)\sin(\theta/2)\cos(\phi/2) - \sin(\psi/2)\cos(\theta/2)\sin(\phi/2) \\ \sin(\psi/2)\cos(\theta/2)\cos(\phi/2) + \cos(\psi/2)\sin(\theta/2)\sin(\phi/2) \end{bmatrix}$$

## Calculation of Rotation Matrix using Quaternion

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \eta^2 + \varepsilon_x^2 - \varepsilon_y^2 - \varepsilon_z^2 & 2(\varepsilon_x\varepsilon_y - \eta\varepsilon_z) & 2(\varepsilon_x\varepsilon_z + \eta\varepsilon_y) \\ 2(\varepsilon_x\varepsilon_y + \eta\varepsilon_z) & \eta^2 - \boldsymbol{\varepsilon}_1^2 + \boldsymbol{\varepsilon}_2^2 - \boldsymbol{\varepsilon}_3^2 & 2(\varepsilon_y\varepsilon_z - \eta\varepsilon_x) \\ 2(\varepsilon_x\varepsilon_z - \eta\varepsilon_y) & 2(\varepsilon_y\varepsilon_z + \eta\varepsilon_x) & \eta^2 - \boldsymbol{\varepsilon}_1^2 - \boldsymbol{\varepsilon}_2^2 + \boldsymbol{\varepsilon}_3^2 \end{bmatrix}$$

## Calculation of Euler Angles using Quaternion

회전행렬 $\mathbf{R}$ 로부터 오일러각을 계산하는 방법을 이용하면 된다. 다음 식에서 사용되는 $r_{ij}$ 는 행렬 $\mathbf{R}$ 의 i 행과 j 열의 원소다.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

**ZYX(Roll-Pitch-Yaw) Angles:**

$\theta$ 가 $(-\pi/2,\ \pi/2)$ 일 때는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\psi &= \operatorname{atan2}\left(r_{21}, r_{11}\right) = \operatorname{atan2}\left(2(\varepsilon_x\varepsilon_y + \eta\varepsilon_z), \eta^2 + \varepsilon_x^2 - \varepsilon_y^2 - \varepsilon_z^2\right), \\
\theta &= \operatorname{asin}\left(-r_{31}\right) = \operatorname{asin}\left(-2(\varepsilon_x\varepsilon_z - \eta\varepsilon_y)\right), \\
\phi &= \operatorname{atan2}\left(r_{32}, r_{33}\right) = \operatorname{atan2}\left(2(\varepsilon_y\varepsilon_z + \eta\varepsilon_x), \eta^2 - \boldsymbol{\varepsilon}_1^2 - \boldsymbol{\varepsilon}_2^2 + \boldsymbol{\varepsilon}_3^2\right).
\end{aligned}$$

$\theta$ 가 $(\pi/2,\ 3\pi/2)$ 일 때는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\psi &= \operatorname{atan2}\left(r_{21}, r_{11}\right) = \operatorname{atan2}\left(-2(\varepsilon_x\varepsilon_y + \eta\varepsilon_z), -(\eta^2 + \varepsilon_x^2 - \varepsilon_y^2 - \varepsilon_z^2)\right), \\
\theta &= \operatorname{asin}\left(-r_{31}\right) = \operatorname{asin}\left(-2(\varepsilon_x\varepsilon_z - \eta\varepsilon_y)\right), \\
\phi &= \operatorname{atan2}\left(r_{32}, r_{33}\right) = \operatorname{atan2}\left(-2(\varepsilon_y\varepsilon_z + \eta\varepsilon_x), -(\eta^2 - \boldsymbol{\varepsilon}_1^2 - \boldsymbol{\varepsilon}_2^2 + \boldsymbol{\varepsilon}_3^2)\right).
\end{aligned}$$

## Calculate Quaternion using Rotation Matrix

회전행렬로부터 쿼터니언은 다음과 같이 계산한다.

$$q = \{\eta,\ \boldsymbol{\varepsilon}\}$$

$$\eta = \frac{1}{2}\sqrt{1 + r_{11} + r_{22} + r_{33}}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{4\eta}\begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}$$

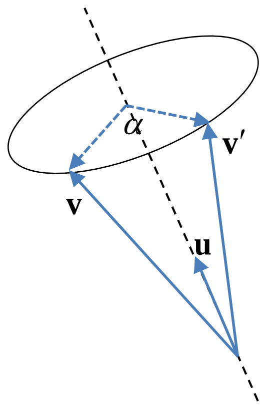
## Quaternion Normalization

쿼터니언이 계속해서 업데이트된다면 수치 계산의 미소한 오류가 누적되어 단위 쿼터니언의 성질이 만족되지 않는다 ($\|\tilde{q}\| \neq 1$). 만일 이러한 쿼터니언 $\tilde{q} = \{\tilde{\eta}, \tilde{\varepsilon}_x, \tilde{\varepsilon}_y, \tilde{\varepsilon}_z\}$ 이 있을 때, 다음과 같이 정규화 될 수 있다.

$$q = \frac{\tilde{q}}{\|\tilde{q}\|} = \frac{\tilde{q}}{\sqrt{\tilde{\eta}^2 + \tilde{\varepsilon}_x^2 + \tilde{\varepsilon}_y^2 + \tilde{\varepsilon}_z^2}}$$

## Vector rotations with Quaternion

단위 벡터 $\mathbf{u}$ 를 회전축으로 $\alpha$ 만큼 회전한 쿼터니언은 $q = \{\cos(\alpha/2), \mathbf{u}\sin(\alpha/2)\}$ 이다.




3차원 공간에서 일반적인 벡터 $\mathbf{v}$ 를 쿼터니언 $q$ 로 회전하면 다음과 같다.

$$p' = qpq^{-1}$$

여기서 $p = \{0, \mathbf{v}\}$ 오 $p' = \{0, \mathbf{v}'\}$ 는 벡터 성분만 있는 순수 쿼터니언이다.

물리적 의미로 해석해 보자면, 벡터 $\mathbf{v}'$ 는 원래 벡터 $\mathbf{v}$ 가 벡터 $\mathbf{u}$ 를 회전축으로 $\alpha$ 만큼 회전한 벡터이다.

## Derivative of Quaternion

쿼터니언의 미분 방정식은 다음과 같다.

$$\dot{q} = \frac{1}{2} q \otimes \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}_{\omega} q = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Xi}_{q} \boldsymbol{\omega}$$

여기서

$$\boldsymbol{\Omega}_{\omega} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{\omega}\times & \boldsymbol{\omega} \\ -\boldsymbol{\omega}^{T} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{bmatrix} \quad \because \ \boldsymbol{\omega}\times = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Xi}_{q} = \begin{bmatrix} \eta \mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}\times \\ -\boldsymbol{\varepsilon}^{T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta & -\varepsilon_z & \varepsilon_y \\ \varepsilon_z & \eta & -\varepsilon_x \\ -\varepsilon_y & \varepsilon_x & \eta \\ -\varepsilon_x & -\varepsilon_y & -\varepsilon_z \end{bmatrix} \quad \because \ \boldsymbol{\varepsilon}\times = \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon_z & \varepsilon_y \\ \varepsilon_z & 0 & -\varepsilon_x \\ -\varepsilon_y & \varepsilon_x & 0 \end{bmatrix}$$

이다.