

1차 회로(RL 및 RC 회로)

- 저항과 직류전원으로 된 회로의 경우 모든 전압과 전류 역시 직류이다.

⇒

회로 내의 전압, 전류가 시간에 따라 변하지 않은 직류일 때 그 회로는 직류정상상태(DC steady state)에 있다고 한다.

➡

회로 내의 모든 전원이 직류일 때에만 직류정상상태가 될 수 있다.

[Note] 전원이 직류가 아니면 그에 따른 전압이나 전류는 직류가 아니다.

- 모든 전압, 전류가 상수인 직류정상상태 회로를 해석할 때:

Inductor : Short circuit

Capcitor : Open circuit

으로 대치할 수 있다.

1차 회로 (First order circuit)

- 저항 회로에 하나의 에너지 저장소자를 추가해서 얻는 회로의 해석.

⇒ RL, RC 회로

$$a_0 \frac{dy(t)}{dt} + a_1 y(t) = x(t)$$

a_0, a_1 : 계수(coefficient)

$y(t)$: 응답(response)

$x(t)$; 강제함수 (forced function)

보조조건: $y(0)$

[Note] RLC 회로는 2차 회로 방정식을 형성한다.

$$a_0 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 y(t) = x(t)$$

보조조건: $y(0), \left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0}$

[Note] 미분방정식의 해는 다음과 같이 구성된다.

$x(t) =$ 고유응답(natural response) + 강제응답(forced response)

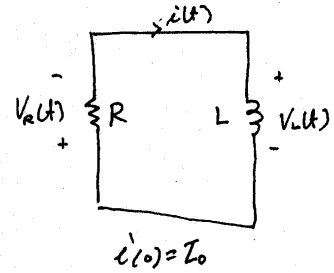
$=$ 과도응답(transient response) + 정상상태응답(steady-state response)

■ 무전원(전원이 없는) RL 회로:

전원이 없는 RL 회로:

⇒ Inductor는 초기시간 (initial time) $t=0$ 일 때

$i_L(0) = I_0$ [A]인 초기전류가 흐른다고 가정하자.



[Note] 회로 내에 전류원 또는 전압원이 없으므로 회로의 응답은 전적으로 초기에 inductor에 저장되었던 에너지에 기인한다.

- 시간 $t > 0$ 일 때의 회로 방정식: (KVL 적용)

$$v_R(t) + v_L(t) = 0$$

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L} i(t) = 0 \quad \dots \text{식 (A)}$$

[Method] 변수 분리법 사용:

변수 $i(t)$ 와 t 를 분리하여 재배열한다.

$$\frac{1}{i(t)} di(t) = -\frac{R}{L} dt$$

양변에 부정적분을 취하면

$$\int \frac{1}{i(t)} di(t) = -\frac{R}{L} \int dt$$

$$\ln i(t) + k_1 = -\frac{R}{L} t + k_2 \quad \Rightarrow \quad \ln i(t) = -\frac{R}{L} t + k$$

여기서 k 는 적분상수이다.

$$i(t) = \exp\left(-\frac{R}{L} t + k\right) = K e^{-\frac{R}{L} t}$$

여기서 K 는 상수이다. ($K = e^k$)

$$\Rightarrow i(0) = i_L(0) = K = I_0$$

$$\therefore i(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L} t}$$

➡ RL 회로 방정식을 변수분리법을 사용하여 구하면 해의 형태가 지수 함수가 됨을 알 수 있다.

$$\text{Let } i(t) = Ke^{st} \dots \text{식 (B)}$$

식 (B)를 식 (A)에 대입하여 정리하면

$$\frac{d}{dt}(Ke^{st}) + \frac{R}{L}(Ke^{st}) = 0$$

⇨

$$\left(s + \frac{R}{L}\right)(Ke^{st}) = 0$$

위 식이 성립할 조건:

$$(1) (Ke^{st}) = 0$$

$$(2) \left(s + \frac{R}{L}\right) = 0$$

여기서 (1)의 조건을 만족하기 위해서는 $K=0$ 이 되어야만 한다. 그러나 $K=0$ 이 되면 모든 시간 t 에 대해서 $i(t)=0$ 이 되어 초기조건 $i(0)=I_0$ 와 모순이기 때문에 이 조건을 배제되어야 한다.

⇨ 따라서

$$s + \frac{R}{L} = 0 : \text{특성방정식(Characteristic equation)}$$

$$\therefore s = -\frac{R}{L}$$

식 (B)로부터

$$i(t) = Ke^{-\frac{R}{L}t}$$

여기서

$$i(0) = i_L(0) = I_0$$

가 되므로

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

[Note] 회로응답 $i(t)$ 는 초기전류 I_0 이고, t 가 증가함에 따라 지수함수적으로 감소하여 0이 된다.

⇒ 감소하는 비율은 단지 저항을 inductance로 나눈 값(R/L)에 의해서 결정된다.

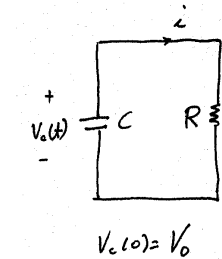
➡ 고유응답을 구동하는 것은 초기에 inductor에 저장된 energy이다.

RC 회로:

전원이 없는 RC 회로

⇒ Capacitor는 초기시간 (initial time) $t=0$ 일 때

$v_C(0) = V_0$ [V]로 충전되어 있다고 가정하자.



[Note] 회로 내에 전류원 또는 전압원이 없으므로 회로의 응답은 전적으로 초기에 capacitor에 저장되었던 에너지에 기인한다.

- 시간 $t > 0$ 일 때의 회로 방정식: (KCL 적용)

$$C \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{R} v_C(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC} v_C(t) = 0$$

[일반적인 방법] 특성방정식 사용:

$$\text{Let } v_C(t) = K e^{st}$$

$$\text{특성방정식: } s + \frac{1}{RC} = 0$$

$$\text{따라서 } s = -\frac{1}{RC}$$

⇒

$$v_C(t) = K e^{-\frac{1}{RC} t}$$

[Note] 회로응답 $v_C(t)$ 는 초기전압 V_0 이고, t 가 증가함에 따라 지수함수적으로 감소하여 0이 된다.

⇒ 감소하는 비율은 단지 저항과 capacitance 곱에 의해서 결정된다.

[Note] 고유응답(natural response)

응답이 회로의 소자에 의해서만 결정될 뿐 외부전원에는 영향을 받지 않으므로 이 응답을 회로의 고유응답이라 한다.

⇒ 고유응답은 회로에 전원이 없을 때의 응답과 같다.

➔ 고유응답을 구동하는 것은 초기에 capacitor에 저장된 energy이다.

시상수 (Time Constant)

에너지 저장소자가 있는 회로의 고유응답이 감쇠하는 비율을 나타내는 척도를 시상수라고 한다.

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{1}{\tau} t}, \quad \tau: \text{시상수 [sec]}$$

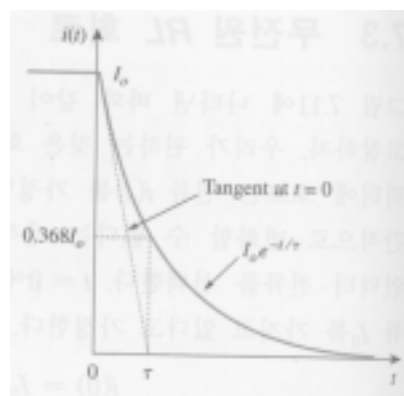
$$\text{RC 회로: } v_c(t) = V_0 e^{-\frac{1}{RC} t} \quad \Rightarrow \quad \tau = RC \text{ [sec]}$$

$$\text{RL 회로: } i(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L} t} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{L}{R} \text{ [sec]}$$

(note) 과도상태가 지나서 얼마나 빨리 정상상태에 도달할 수 있는가는 시스템의 특성에 따라 결정된다. ➔ 회로망에서 이러한 특성은 그 회로의 시상수에 의해 결정된다.

시상수가 $3\tau \sim 5\tau$ 정도에서는 전류는 초기값에 비해 무시할 수 있는 정도로 작아진다.

$\frac{t}{\tau}$	$\frac{i(t)}{I_0}$
0	1.0
1	0.368
2	0.135
3	0.0498
4	0.0183
5	0.0067



직류전원이 있는 회로

- Energy 저장 소자에 저장된 초기 energy에 추가해서 DC 독립전원으로 구동되는 회로.
⇒ 이 회로의 응답은 초기 저장 energy와 DC 독립전원 두 가지 모두에 의존한다.

$$\begin{aligned}\text{완전응답} &= \text{고유응답(natural response)} + \text{강제응답(forced response)} \\ &= \text{과도응답(transient response)} + \text{정상상태응답(steady-state response)}\end{aligned}$$

[Remark] 1차 미분방정식

$$\frac{dv(t)}{dt} + P v(t) = Q, \quad P, Q: \text{Constant}$$

➡ 미분방정식 해:

$$v(t) = \frac{Q}{P} + K e^{-P t}$$

(1) If $Q=0$ (전원이 없는 1차 회로)

$$\frac{dv(t)}{dt} + P v(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad v(t) = K e^{-P t}$$

(시간이 지나감에 따라 지수적으로 감소하는 고유응답이 된다.)

(2) DC 정상상태 응답

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \frac{Q}{P} + \lim_{t \rightarrow \infty} K e^{-P t} \quad \Rightarrow \quad v(\infty) = \frac{Q}{P}$$

(시간 t 가 무한히 커짐에 따라 고유응답은 소멸하고 DC 정상상태의 값만 남게 된다. 정상상태의 값을 강제응답이라고도 한다.)

(note) 고유응답(특성방정식 사용)

➡ 고유응답은 강제함수를 0으로 한 상태에서 구하면 된다.

$$\frac{dv_n(t)}{dt} + P v_n(t) = 0$$

특성방정식:

$$s + P = 0 \quad \Leftrightarrow \quad s = -P$$

$$\therefore v_n(t) = K e^{-P t}$$

■ 완전응답

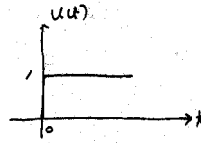
$$v(t) = v_f(t) + v_n(t) = \frac{Q}{P} + K e^{-P t}$$

미지수 K 는 완전응답에서 초기 조건을 사용하여 구한다.

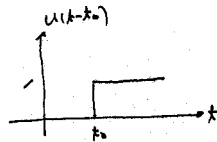
$$v(0^-) = v(0) = v(0^+)$$

■ 단위계단 함수(Unit step function)

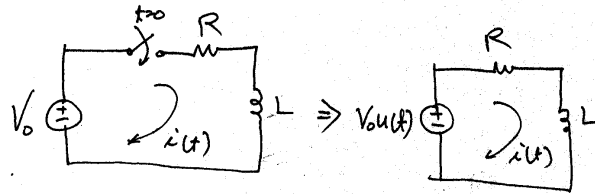
$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



$$u(t-t_0) = \begin{cases} 1 & t > t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases}$$



■ RL 회로:



• 초기값 $i(0) = ?$

$t=0^-$ 일 때에 switch가 개방된 상태이므로 $i(0^-) = 0$ 이다.

따라서 인덕터에서는 전류가 급격히 변할 수 없으므로,

$$i(0) = i(0^-) = 0$$

• 회로방정식:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = V_0 \quad t > 0$$

강제함수 V_0 가 존재하므로 고유응답과 강제응답을 갖고 있다. 즉,

$$i = i_n + i_f$$

• 고유응답 i_n :

고유응답은 전원이 없이 얻은 결과의 동일하다.

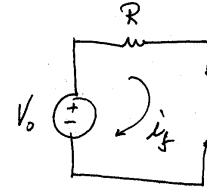
즉 강제함수가 0인 상태에서 구한 응답이다.

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0 \quad \Rightarrow \quad i_n = K e^{-\frac{R}{L} t}$$

- 강제응답 i_f :

DC 정상상태에서 인덕터는 단락 회로 역할을 한다. 즉,

$$i_f = \frac{V_0}{R}$$



- 완전응답 i :

$$i = i_n + i_f = K e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{V_0}{R}$$

고유응답에 나타나는 미지수 K는 초기조건 값을 사용하여 구한다.

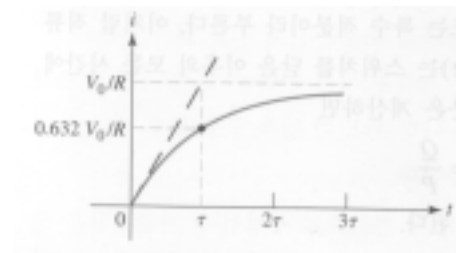
$$i(0) = \frac{V_0}{R} + K = 0$$

⇒

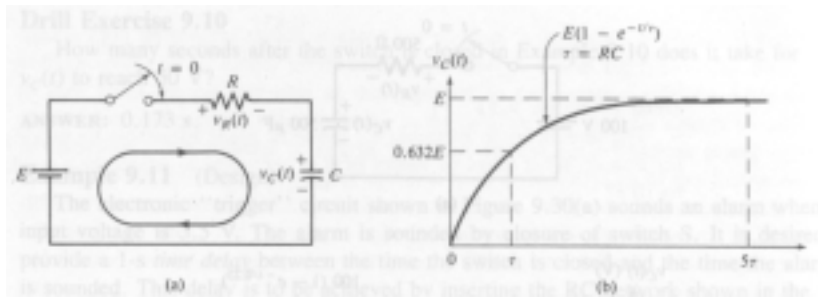
$$K = -\frac{V_0}{R}$$

따라서

$$i(t) = \frac{V_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \quad t > 0$$



■ RC 회로:



- 초기전압 : $v_c(0^-) = 0 [V]$

따라서 $v_c(0) = v_c(0^-) = 0 [V]$

- 회로방정식 :

$$C \frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c - E}{R} = 0$$

$\Rightarrow$

$$C \frac{dv_c}{dt} + \frac{1}{R} v_c = \frac{E}{R}$$

- 고유응답 v_{cn} :

$$C \frac{dv_c}{dt} + \frac{1}{R} v_c = 0$$

$\Rightarrow$ 특성방정식

$$Cs + \frac{1}{R} = 0 \quad \text{따라서} \quad s = -\frac{1}{RC}$$

$\Rightarrow$

$$v_{cn}(t) = K e^{-\frac{1}{RC} t}$$

- 강제응답 v_{cf} :

정상상태에서 capacitor는 개방회로 역할을 한다.

$$v_{cf}(t) = E$$

▪ 완전응답 v_c :

$$v_c(t) = v_{cn}(t) + v_{cf}(t)$$

$$= E + K e^{-\frac{1}{RC} t}$$

$\Rightarrow$

$$v_c(0) = E + K = 0 \quad \text{따라서} \quad K = -E$$

$\Rightarrow$

$$v_c(t) = E \left(1 - e^{-\frac{1}{RC} t} \right)$$

$$i(t) = C \frac{dv_c}{dt} = \frac{E}{R} e^{-\frac{1}{RC} t}$$

[Another Method] (전하 사용)

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt = E \quad (1)$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad (2)$$

식 (2)를 식 (1)에 대입

$$R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = E \quad (3)$$

➡ 식 (3)은 강제응답과 고유응답을 갖는다.

$$q(t) = q_n(t) + q_f(t)$$

(1) $q_f(t)$:

Trial solution $q_s(t) = A$

➡

$$\therefore A = CE \quad (4)$$

(2) $q_n(t)$:

$$R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} q(t) = 0 \quad (5)$$

➡ 특성방정식

$$Rs + \frac{1}{C} = 0 \quad \therefore s = -\frac{1}{RC}$$

$$\therefore q_n(t) = k e^{-\frac{1}{RC}t}$$

(3) 완전응답

$$q(t) = q_s(t) + q_t(t) = CE + k e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$\text{초기조건 } q(0)=0 \quad (\because q(t) = C v_C(t))$$

$$\Rightarrow q(0) = CE + k = 0 \quad \therefore k = -CE$$

$$\therefore q(t) = CE \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t} \right), \quad t \geq 0$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{E}{R} e^{-\frac{1}{RC}t}$$

